Alternativni redovi. Redovi sa proizvoljnim članovima.

Doc. dr Nevena Mijajlović

Računarstvo i informacione tehnologije, PMF

Matematika 3

Definicija

Red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je **alternativni red** ako njegovi članovi naizmjenično mijenjaju znak, tj. ako za svako $k \in \mathbb{N}$ važi

$$a_k a_{k+1} < 0.$$

Prema definiciji, u alternativnom redu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je

$$a_1 < 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 < 0, \quad a_4 > 0, \quad \ldots$$

ili

$$a_1 > 0, \quad a_2 < 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 < 0, \quad \ldots$$

Promjena znaka članova reda se reguliše drugačijim oznakama:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} b_k,$$

gdje je $|b_k| = a_k > 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Umjesto prethodnih, bez dovodjenja u zabunu, nadalje koristimo standardne oznake:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k,$$

gdje je $a_k > 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Kako je

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k = -\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$$

svejedno je koji od redova razmatramo.

- Definicije i teoreme navedene na prvom času važe za sve brojne, pa i za alternativne redove.
- Medjutim, kriterijumi konvergencije pozitivnih redova ne važe za alternativne redove.
- Zato su izvedeni drugi kriterijumi, od kojih je najpoznatiji Leibnizov.

Leibnizov kriterijum

Alternativni red

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$$

je konvergentan ako je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ opadajući i

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Ostatak R_n konvergentnog reda je po modulu manji od prvog zanemarenog člana, tj.

$$|R_n| \leq a_{n+1},$$

i ima isti znak $(-1)^n$ kao taj član.

Primjer 1: Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$$

Ovdje je

$$a_n = \frac{1}{n},$$

pa niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ opada i $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Prema Leibnizovom kriterijumu dati alternativni red konvergira. Ostatak R_n ima znak $(-1)^{n+2} = (-1)^n$ i važi

$$|R_n| < a_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

$\boxdot$

Primjer 2: Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k}{k^3+1}$$

Ovdje je

$$a_n = \frac{n}{n^3+1},$$

pa važi

$$a_n = \frac{n}{n^3+1} > \frac{n+1}{(n+1)^3+1} = a_{n+1}$$

pa niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ opada i $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Prema Leibnizovom kriterijumu dati alternativni red konvergira. Ostatak R_n ima znak $(-1)^{n+1}$ i važi

$$|R_n| < a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^3+1}.$$

Redovi sa proizvoljnim članovima

- Alternativni redovi su specijalan slučaj redova sa proizvoljnim članovima.
- Redovi sa proizvoljnim članovima su oni čiji članovi imaju različit znak, pri čemu promjena znaka ne mora da podleže nekoj posebnoj pravilnosti kao kod alternativnih redova.
- Kod redova sa proizvoljnim članovima, uključujući i alternativne redove, razlikuju se dve vrste konvergencije: **apsolutna i uslovna konvergencija**.

Definicija

Red sa proizvoljnim članovima

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

apsolutno konvergira ako konvergira pozitivan red

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Očigledno da je apsolutna konvergencija nekog reda isto što i konvergencija odgovarajućeg pozitivnog reda. Zato za ispitivanje apsolutne konvergencije mogu da se koriste svi kriterijumi za pozitivne redove.

Cauchyeva teorema

Ako je red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ apsolutno konvergentan, onda je on i konvergentan.

Obrnuto tvrdjenje u odnosu na Cauchyevu teoremu ne važi u opštem slučaju. Preciznije, red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ može da bude konvergentan, a da ne bude apsolutno konvergentan. Zato je uveden sledeći pojam.

Definicija

Red sa proizvoljnim članovima $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je **uslovno konvergentan** ili **semikonvergentan** ako je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentan i istovremeno $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergentan.

Dakle, uslovno konvergentan red je konvergentan, ali ne i apsolutno konvergentan, pa se za uslovnu konvergenciju često kaže samo konvergencija.

Primjer 3: Ispitati apsolutnu konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k}{k^3+1}.$$

Opšti član reda je

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{n^3+1}$$

pa je

$$|a_n| = \frac{n}{n^3+1}.$$

Red $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ je pozitivan red, pa za ispitivanje njegove konvergencije koristimo, npr., poredbeni kriterijum. Neka je $b_n = \frac{1}{n^2}$ opšti član reda $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, čiju konvergenciju smo ustanovili ranije.

Formiramo
$$\frac{|a_n|}{b_n} = \frac{\frac{n}{n^3+1}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^3}{n^3+1},$$
i nalazimo
$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+1} = 1.$$
Zbog $L = 1 \in (0, +\infty)$, red $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergira, tj. dati red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ apsolutno konvergira. Prema Cauchyevoj teoremi, dati red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira.

Ovu činjenicu smo već utvrdili pomoću Leibnizovog kriterijuma jer je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ alternativni red. $\boxdot$

Primjer 4: Ispitati apsolutnu konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2^{k-1}}.$$

Opšti član reda je

$$a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n-1}}$$

pa je

$$|a_n|=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Red

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$

je geometrijski red sa $q=1/2<1$, pa je konvergentan i ima sumu

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Zato red $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2^{k-1}}$ apsolutno konvergira, i prema Cauchyevoj teoremi, konvergira.

Primijetimo da je dati red alternativni red, pa smo njegovu konvergenciju (ne i apsolutnu konvergenciju) mogli jednostavno da utvrdimo pomoću Leibnizovog kriterijuma. Pomoću ovog kriterijuma možemo da dobijemo i procjenu ostatka

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2^{k-1}} \right| < \frac{1}{2^n},$$

ali ne i zbir reda.

Medjutim, kako je $(-1)^{k+1} = (-1)^{k-1}$, red možemo zapisati u obliku reometrijskog reda

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}$$

Ovdje je $q = -1/2$ i $|q| < 1$, pa red konvergira i ima sumu

$$S = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

$\boxdot$

Primjer 5: Ispitati apsolutnu konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}.$$

Opšti član reda je

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n},$$

pa je

$$|a_n| = \frac{1}{n}.$$

Red

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

je harmonijski red, za koji smo utvrdili da divergira. Dakle red $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ ne konevrgira apsolutno. $\square$